

```
23 |
24 | _fern:=proc(root,side,angle,sym)
25 | global graph:
26 | local temp:
27 |   if side > 1 then
28 |     temp:=branch(root,side,angle,sym):
29 |     _fern(temp[1],.35*side,temp[2]+sym*Pi/3.,sym):
30 |     _fern(temp[3],.35*side,temp[4]-sym*Pi/3,-sym):
31 |     _fern(temp[5],.8*side,temp[6],sym):
32 |   end if:
33 | end proc:
34 |
35 | > center:=[0,0]:
36 | graph:=[]:
37 | _fern(center,150.,Pi/2.,1);
38 | display(graph,scaling=constrained,axes=none);
```

## Литература

1. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. Учебное пособие/ М.Н. Кирсанов. – СПб: Лань, 2012. – 512 с.

## GEOMETRIC FRACTALS CONSTRUCTION IN CAS MAPLE

A.A. Agathonov

*Examples of constructing some known geometric fractals in the CAS Maple are given.*

Keywords: geometric fractals, programming, CAS Maple.

УДК 378.147

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

А.В. Букушева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [bukusheva@list.ru](mailto:bukusheva@list.ru); Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

*Рассматривается применение системы Wolfram Mathematica в решении задач тензорного анализа.*

**Ключевые слова:** бакалавриат, Wolfram технологии, компьютерная геометрия, тензорный анализ.

Компьютерные технологии становятся регулярной, обязательной частью математического образования. Повышение качества процесса обучения математике обеспечивается за счет реализации дидактических возможностей информационных и коммуникационных технологий: автоматизации информационно-поисковой и вычислительной деятельности; моделирование, виртуальное представление на экране изучаемых математических объектов; расширения самостоятельной деятельности в условиях использования систем компьютерной математики (С.С. Кравцов, Л.П. Мартиросян, И.В. Роберт и др.).

Вопросы применения систем компьютерной математики в процессе преподавания математических дисциплин рассматривались в работах В.И. Глизбург, В.А. Далингера, В.П. Дьяконова, Ю.Г. Игнатьева, М.П. Лапчика, Е.К. Хеннера и др.. В научно-методической литературе возможности программы Wolfram Mathematica проанализированы в работах А.О. Иванова, В.З. Аладьева, Д. Бурланкова, Е.Г. Давыдова, В.П. Дьяконова, Д.П. Ильютко, Т.В. Капустиной, Г.В. Носовского, В.Б. Таранчук, А.А. Тужилина, А.Т. Фоменко и других.

Дисциплина "Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование" изучается будущими бакалаврами, обучающимися по направлению "Математика и компьютерные науки", на четвертом курсе. Целью учебной дисциплины является формирование и развитие у студентов практических навыков моделирования геометрических объектов и создания визуализации с помощью компьютерных технологий. Задачи дисциплины: изучить математический аппарат, необходимый для моделирования геометрических объектов, освоить современные компьютерные технологии для изображения и моделирования геометрических объектов, познакомить студента с основами компьютерного геометрического моделирования, которое позволяет сделать работу математика-исследователя более эффективной.

Некоторые Wolfram технологии и их применение в обучении компьютерной геометрии рассмотрены в [1]. Принципы обучения геометрии с использованием системы Mathematica описаны в [2]. Для проведения лабораторных занятий, организации самостоятельной аудиторной и внеаудиторной работы студентов, а также подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации нами разработан и дополняется в настоящее время электронный образовательный курс на базе LMS Moodle (<http://course.sgu.ru>) [3]. Интернет-ресурсы WolframAlpha, Wolfram Language System "Documentation Center" виртуальная лаборатория Wolfram Programming Lab используется для изучения языка программирования Wolfram Language, организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов. Применение онлайн программы Wolfram Programming Lab в учебном процессе обеспечивает реализацию учебно-познавательной, исследовательской деятельности, повышает эффективность самостоятельной работы студента. Задачи разного уровня сложности и индивидуальные творческие задания дают возможность каждому студенту раскрыть свой творческий потенциал. Примеры таких задач по компьютерной геометрии приведены в [4].

Рассмотрим некоторые возможности использования Mathematica в решении задач тензорного анализа, которые могут быть использованы на лабораторных занятиях по компьютерной геометрии при первом знакомстве студентов с данной программой.

**Пример 1.** Найти интегральную кривую  $v(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$  векторного поля на плоскости, проходящую через точку  $A(1, 1)$  [5, С. 40].

Решим систему дифференциальных уравнений и построим интегральные кривые векторного поля при различных значениях константы, в том числе кривую проходящую через данную точку.

```
In[1]:= ds = DSolve[D[x[t], t] == y[t], D[y[t], t] == -x[t], {x, y}, t]
Out[1]=
x → Function[t, C[1] Cos[t] + C[2] Sin[t]], y → Function[t, C[2] Cos[t] - C[1] Sin[t]]
```

Построим таблицу решений, заменив C[1], C[2] на  $k$ , где  $k$  изменяется от 1 до 4 с шагом 1:

```
In[2]:= tab = Table[x[t], y[t] /. ds[[1]] /. C[1] → k, C[2] → k, {k, 1, 4, 1}]
```

```
Out[2]=
```

```
{{Cos[t] + Sin[t], Cos[t] - Sin[t]}, {2Cos[t] + 2Sin[t], 2Cos[t] - 2Sin[t]},  
{3Cos[t] + 3Sin[t], 3Cos[t] - 3Sin[t]}, {4Cos[t] + 4Sin[t], 4Cos[t] - 4Sin[t]}}
```

Нарисуем векторное поле и его интегральные кривые.

```
In[3]:= Show[ParametricPlot[Evaluate[tab], {t, 0, 2π}, PlotStyle → Thickness[0.005]],  
VectorPlot[{y, -x}, {x, -6, 6}, {y, -6, 6}]]
```

**Пример 2.** Пусть в евклидовом пространстве  $E^3$  в прямоугольных координатах задано векторное поле  $a(x, y, z) = (-y, x, 1)$ . Интегрируя систему  $\frac{dx}{dt} = -y, \frac{dy}{dt} = x, \frac{dz}{dt} = 1$ , при начальном условии  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ , получим преобразования  $x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t, z(t) = z_0 + t$ . Интегральные пути этого потока образуют 2-параметрическое семейство винтовых линий. Нарисуем векторное поле и его интегральные кривые.

```
In[4]:=
```

```
DSolve[{D[x[t], t] == -y[t], D[y[t], t] == x[t], D[z[t], t] == 1, x[0] == x0, y[0] == y0,  
z[0] == z0}, {x, y, z}, t]
```

```
Out[4]=
```

```
{{x → Function[{t}, x0Cos[t] - y0Sin[t]], y → Function[{t}, y0Cos[t] + x0Sin[t]],  
z → Function[{t}, t + z0]}}
```

```
In[5]:= x0 = 1; y0 = 1; z0 = 1;
```

```
In[6]:= Show[ParametricPlot3D[{x0Cos[t] - y0Sin[t], y0Cos[t] + x0Sin[t], t + 1},  
{t, 0, 3π}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.005]}], VectorPlot3D[{-y, x, 1}, {x, -5, 5},  
{y, -5, 5}, {z, -10, 10}]]
```

**Пример 3.** Рассмотрим риманово многообразие  $(\mathbb{R}^3, g)$ . Пусть координатное представление метрического тензора  $g$  в базисе  $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 + (x^2)^2 & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зададим гладкое распределение  $D = \text{Span}(\vec{e}_a)$ ,  $(a = 1, 2)$ , где  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_3$ .

Составим уравнение геодезических. Выполнив необходимые вычисления, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^a}{dt^2} = 0, \\ \frac{d^2 x^3}{dt^2} = x^2 \frac{dx^1}{dt}, \end{cases}$$

в которой первые два уравнения означают, что векторное поле вдоль кривой параллельно, а третье уравнение – геодезическая касается распределения  $D$ . Визуализируем геодезические.

```
In[6]:= DSolve[{D[x[t], {t, 2}] == 0, D[y[t], {t, 2}] == 0, D[z[t], {t, 2}] == y[t] D[x[t], t]},  
{x, y, z}, t]
```

```
Out[6]=
```

```
{{x → Function[t, tC[1] + C[3]], y → Function[t, tC[2] + C[4]],  
z → Function[t, 1/6 t^3 C[1] C[2] + 1/2 t^2 C[1] C[4] + tC[5] + C[6]]}}
```

```
In[7]:=
```

```
Manipulate[ ParametricPlot3D [{c1 t + c3, c2 t + c4, c1 c2 t^3 / 6 + 1/2 t^2 c1 c4 + c5 t + c6},
{t, -6, 4}, PlotStyle -> {Thickness[0.01], Red}],
{c1, -1, 1}, {c2, -1, 1}, {c3, -1, 1}, {c4, -1, 1}, {c5, -1, 1}, {c6, -1, 1},
ControlPlacement -> {Left}]
```

## Литература

1. Букушева А.В. Возможности использования Wolfram технологий при изучении компьютерной геометрии / А.В. Букушева // Труды Международной научно-практической конференции “Информатизация образования - 2016”, Сочи. – М.: Изд-во СГУ, 2016. – С. 168–175.
2. Букушева А.В. Принципы методической системы обучения компьютерной геометрии / А.В. Букушева // Балтийский гуманитарный журнал. – 2016. – Т. 5, № 3 (16). – С. 95–98.
3. Букушева А.В. Организация самостоятельной работы студентов при изучении компьютерной геометрии в LMS MOODLE / А.В. Букушева // Азимут научных исследований: педагогика и психология. – 2016. – Т. 5, № 3 (16). – С. 30–34.
4. Букушева А.В. Учебно-исследовательские задачи в подготовке бакалавров-математиков / А.В. Букушева // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия “Информационные компьютерные технологии в образовании”. – 2015. – Вып. 11. – С. 85–93.
5. Малахальцев, М.А. Сборник по тензорному анализу: Методическое пособие / П.П. Петров, М.А. Малахальцев. – М.: Издательство Казанского государственного университета, 2008. – 76 с.

## USAGE OF COMPUTER MATHEMATICS SYSTEMS IN SOLVING TASKS OF TENSOR ANALYSIS

A.V. Bukusheva

*We consider application of the Wolfram Mathematica system in solving tensor analysis tasks.*

Keywords: bachelor's training, Wolfram technologies, computer geometry, tensor analysis.

УДК 372.851

## ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

А.Ф. Гилязиева<sup>1</sup>, Н.В. Тимербаева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [gilazieva2016f05a@yandex.ru](mailto:gilazieva2016f05a@yandex.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> [timnell@yandex.ru](mailto:timnell@yandex.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*Статья посвящена применению математической программы GeoGebra при изучении стереометрии в курсе школьной математики. Проиллюстрирован широкий спектр возможностей программы для динамической, наглядной работы с геометрическими объектами, обоснованы преимущества и недостатки. Доказывается целесообразность использования данной технологии на этапе обобщения и систематизации учебного материала.*

**Ключевые слова:** GeoGebra, геометрия, компьютерные технологии, стереометрия.